

TRECCE, MAPPING CLASS GROUP, FIBRAZIONI DI LEFSCHETZ ED APPLICAZIONI AL DIFFEOMORFISMO DI SUPERFICIE ALGEBRICHE.

FABRIZIO CATANESE

1. INTRODUZIONE

Uno dei problemi fondamentali nella teoria delle superficie algebriche e' quello di capire gli spazi di moduli delle superficie di tipo generale, in particolare le loro componenti connesse, che parametrizzano classi di equivalenza per deformazione di superficie minimali di tipo generale.

Per un classico teorema di Ehresmann, due variet  complessesche equivalenti per deformazione sono tra loro diffeomorfe.

Negli anni 80, Friedman e Morgan ([F-M1]) hanno congetturato che due superficie algebriche siano equivalenti per deformazione se e solamente se sono tra loro diffeomorfe tramite un diffeomorfismo che conserva l' orientazione (congettura da noi abbreviata con l' acronimo Def= Diff).

Dopo i primi contresempi di M. Manetti (cf. [Man4]), dei contresempi piu' semplici sono stati trovati dall' autore e da Kharlamov-Kulikov ([Cat4] e [K-K]).

In entrambi questi ultimi lavori, vengono utilizzate coppie di superficie complesse coniugate. Si puo' pero' correggere la congettura, e richiedere da un lato un diffeomorfismo $\phi : S' \rightarrow S$ che porta la prima classe di Chern $c_1(K_S) \in H^2(S, \mathbb{Z})$ del divisore canonico in $c_1(K_{S'})$ (a seguito di risultati di Witten e Morgan si sa oggi che ogni diffeomorfismo porta $c_1(K_S)$ o in $c_1(K_{S'})$ o in $-c_1(K_{S'})$).

D' altro lato si puo' restringere la congettura al caso di superficie semplicemente connesse, per cui il tipo topologico, per il famoso teorema di M. Freedman ([Free]), e' univocamente determinato dai due invarianti numerici K_S^2 e $\chi(S) := \chi(\mathcal{O}_S)$ e dalla classe di resto modulo 2 del numero $r(S) :=$ divisibilita' di $c_1(K_S)$ in $H^2(S, \mathbb{Z})$.

In effetti, gli esempi di Manetti hanno un primo gruppo di omologia non triviale e gli altri esempi citati possiedono dei rivestimenti non ramificati di ordine finito per cui vale Def = Diff .

Scopo fondamentale della conferenza e' stato quello di introdurre certi concetti e tecniche, in parte classici, che sono stati utilizzati da Bronislaw Wajnryb e dall' autore per dimostrare esplicitamente ([C-W]) il diffeomorfismo di alcune superficie algebriche assai elementari, ma che portano ai desiderati contresempi alla congettura Def= Diff nel caso semplicemente connesso.

Alcune parole chiave sono : somma connessa, chirurgie, gruppo fondamentale di Poincare', gruppo delle trecce, superficie di Riemann (curve complesse), gruppo del Dehn delle classi di applicazioni (Mapping class group).

Un aspetto interessante ed ancora da esplorare e' la sinergia fra la geometria complessa e la geometria simplettica.

Questa sinergia ha come strumento chiave, a seguito di risultati fondamentali dovuti a Kas, Donaldson e Gompf ([Kas], [Don6],[Gompf1]), la estensione al caso di 4-varietà' simplettiche della teoria delle fibrazioni di Lefschetz, che ha già' svolto un ruolo centrale nello studio della topologia delle varietà' algebriche.

Mentre la dimostrazione del risultato nel lavoro dell' autore con Wajnryb e' assai elaborata (e la sua parte piu' topologica si articola anche attraverso una lunga serie di figure atte a mostrare la isotopia di certe curve), il suo spirito e' assai generale ed abbiamo la speranza da una parte che il metodo si presti a dimostrare il diffeomorfismo di importanti classi di superficie algebriche, dall' altra che una variante del metodo porti anche a stabilire la equivalenza simplettica di certe superficie algebriche munite della struttura simplettica canonica definita dall' autore in [Cat6].

CONTENTS

1. Introduzione	1
2. Le idee di Riemann: varietà' differenziabili e topologiche ed operazioni su di esse.	2
3. Il gruppo di Poincare' $\pi_1(X)$.	4
4. Trecce e Mapping class group.	6
5. Fibrazioni di Lefschetz.	11
6. ABC e Def \neq Diff nel caso semplicemente connesso.	14
7. Varietà' simplettiche e monodromia delle trecce.	17
8. Monodromia delle trecce ed il problema di Chisini.	18
References	20

2. LE IDEE DI RIEMANN: VARIETÀ' DIFFERENZIABILI E TOPOLOGICHE ED OPERAZIONI SU DI ESSE.

Ricordiamo la definizione di varietà', concetto introdotto essenzialmente da B. Riemann nella sua dissertazione inaugurale per la Libera Docenza.

Una varietà' M di dimensione reale m e' uno spazio topologico tale che per ogni punto $p \in M$ esiste un aperto U_p contenente p ed un omeomorfismo (detto carta locale) $\psi_p : U_p \rightarrow V_p \subset \mathbb{R}^m$ su di un aperto V_p di \mathbb{R}^m ed inoltre vale la proprietà' fondamentale che, nel dominio di definizione,

$\psi_{p'} \circ \psi_p^{-1}$ sia un:

- Omeomorfismo (sull' immagine) per M **varietà' topologica**

- Diffeomorfismo (sull' immagine) per M **varietà' differenziabile**
- Biolomorfismo (sull' immagine) per M **varietà' complessa** (in questo ultimo caso $m = 2n$, $\mathbb{R}^m = \mathbb{C}^n$).

Definition 2.1. *La operazione di somma connessa $M_1 \# M_2$ si puo' effettuare nell' ambito delle varieta' differenziabili o topologiche della stessa dimensione.*

Si scelgono rispettivi punti $p_i \in M_i$ e carte locali estendibili in un intorno di $\overline{U_{p_i}}$

$$\psi_{p_i} : U_{p_i} \rightarrow \cong B(0, \epsilon_i) := \{x \in \mathbb{R}^m \mid |x| < \epsilon_i\},$$

e, ponendo $B(0, \epsilon_i)^ := B(0, \epsilon_i) - \{0\}$, si considera un diffeomorfismo $\psi : B(0, \epsilon_1)^* \rightarrow B(0, \epsilon_2)^*$ tale che $\psi(x) = f(|x|) \frac{x}{|x|}$ per una opportuna funzione differenziabile decrescente tale che $f(0) = \epsilon_1, f(\epsilon_2) = 0$.*

Allora la somma connessa $M_1 \# M_2$ e' lo spazio quoziente della unione disgiunta $(M_1 - \{p_1\}) \cup (M_2 - \{p_2\})$ per la relazione di equivalenza che identifica $y \in (U_{p_1} - \{p_1\})$ a $w \in (U_{p_2} - \{p_2\})$ se e solo se

$$w = \psi_{p_2}^{-1} \circ \psi \circ \psi_{p_1}(y).$$

Sussiste il seguente

Theorem 2.2. *Il risultato della operazione di somma connessa e' ben definito, cioe' e' indipendente dalle scelte fatte dei due punti p_1, p_2 e della funzione scalare f .*

Example 2.3. *L' esempio piu' intuitivo (vedi Figura 1) e' quello di due superficie di Riemann compatte (orientabili) M_1, M_2 di rispettivi generi g_1, g_2 : allora $M_1 \# M_2$ e' compatta orientabile ed ha genere $g_1 + g_2$.*

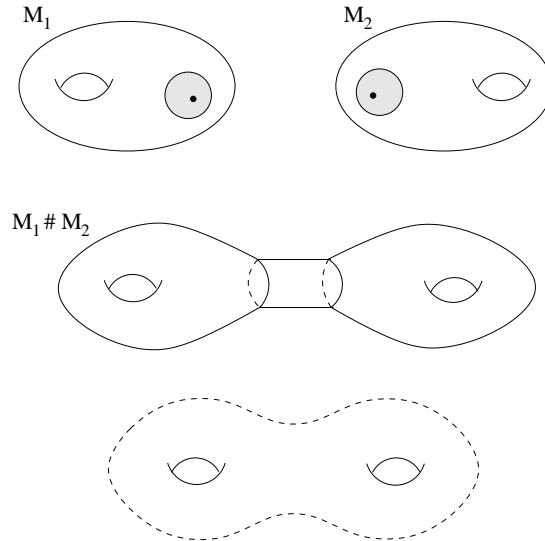


FIGURE 1. La Somma Connessa

Remark 2.4. *L' operazione di somma connessa fra varieta' della stessa dimensione ci da' un semigruppato: vale cioe' la associativita', ed abbiamo come elemento neutro la sfera $S^m := \{x \in \mathbb{R}^{m+1} \mid |x| = 1\}$. E' facile infatti verificare che $M \# S^m \cong M$.*

Definition 2.5. *La varieta' M si dice **irriducibile** se $M \cong M_1 \sharp M_2$ implica che M_1 oppure M_2 e' omotopicamente equivalente ad una sfera S^m .*

In dimensione due, ogni varieta' compatta di genere $g \geq 1$ e' somma connessa di g tori (superficie di Riemann di genere 1, diffeomorfi a $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$), e quindi e' riducibile se $g \geq 2$. Ma in dimensione piu' alta vi sono molte varieta' irriducibili, ed allora si ricorre ad altri procedimenti costruttivi. Ecco un esempio ulteriore

Definition 2.6. (CHIRURGIA)

Sia, per $i = 1, 2$, $N_i \subset M_i$ una sottovarieta' differenziabile. Questo vuol dire che per ogni $p \in M_i$ esiste una carta dove l' immagine di N_i e' l' intersezione con un sottospazio di \mathbb{R}^m dove si annullano certe coordinate, ed implica, per via del teorema delle funzioni implicite, che esiste un aperto $U_i \supset N_i$ che e' diffeomorfo al fibrato normale ν_{N_i} della immersione di $N_i \rightarrow M_i$, tramite un diffeomorfismo che porta N_i nella sezione nulla di ν_{N_i} .

Supponiamo ora che esista un diffeomorfismo $\phi : N_1 \rightarrow N_2$, ed un diffeomorfismo $\psi : (\nu_{N_1} - N_1) \rightarrow (\nu_{N_2} - N_2)$ compatibile con le proiezioni $p_i : \nu_{N_i} \rightarrow N_i$ (cioe' tale che $p_2 \circ \psi = p_1$), e con la proprieta' di rovesciare la orientazione sulle fibre. Si puo' allora prendere la varieta' $M_1 \sharp_\psi M_2$, definita di nuovo come quoziente della unione disgiunta $(M_1 - N_1) \cup^\circ (M_2 - N_2)$ per la relazione di equivalenza che identifica $(U_1 - N_1)$ a $(U_2 - N_2)$ tramite il diffeomorfismo indotto da ψ .

Remark 2.7. *Questa volta il risultato della operazione dipende dalla scelta di ϕ e di ψ .*

Il problema che nasce, dopo che abbiamo introdotto cosi' tanti modi di produrre nuove varieta', e' quello di riconoscere quando due varieta' sono tra loro omeomorfe o diffeomorfe.

Il metodo fondamentale della topologia algebrica e' quello di associare ad ogni spazio topologico X un oggetto algebrico $H(X)$ in modo functoriale, cioe' in modo tale che ad ogni applicazione continua $f : X \rightarrow Y$ corrisponda un unico omomorfismo $H(f) : H(X) \rightarrow H(Y)$. Un esempio archetipico e' dato dal gruppo fondamentale, introdotto da Henri Poincare'.

3. IL GRUPPO DI POINCARÉ' $\pi_1(X)$.

Sia X uno spazio topologico e $p \in X$: allora il Gruppo Fondamentale (di Poincare') di X e' definito tramite l' insieme delle classi di omotopia

$$\pi_1(X, p) := \{ \sigma : [0, 1] \rightarrow X \mid \sigma \text{ e' continua, } \sigma(0) = \sigma(1) = p \} / \text{OMOTOPIA}.$$

Dove, dati spazi Y, X e sottospazi $Y' \subset Y, X' \subset X$ (qui $Y = [0, 1], Y' = \{0, 1\}, X' = \{p\}$), due applicazioni continue $f, g : (Y, Y') \rightarrow (X, X')$ (cioe' tali che portano Y' in X') si dicono OMOTOPE con estremi in X' se esiste una applicazione continua $F : (Y \times [0, 1], Y' \times [0, 1]) \rightarrow (X, X')$ tale che $f(y) = F(y, 0), g(y) = F(y, 1)$.

La struttura di gruppo e' fornita dalla composizione di due cammini (a velocita' doppia), che si definisce cosi' :

- $\sigma \circ \tau(t) := \sigma(2t)$ per $0 \leq t \leq 1/2$, mentre
- $\sigma \circ \tau(t) := \tau(2t - 1)$ per $1/2 \leq t \leq 1$.

Mentre il cammino inverso e' cosi' definito

$$\sigma^{-1}(t) := \sigma(t - 1).$$

Nel caso di una varieta' connessa M il gruppo fondamentale e' ben definito a prescindere dalla scelta del punto base p , e quindi si denotera' sovente solo con $\pi_1(M)$.

Example 3.1. Consideriamo la superficie di Riemann di genere 0, ovvero la varieta' complessa data dalla retta proiettiva $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1 \cong S^2$, e prendiamo per M il complementare di un insieme di k punti distinti: $M := \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1 - \{p_1, \dots, p_k\}$.

Poiche' a meno di diffeomorfismo possiamo sempre supporre che i punti dati siano i punti $p_h := -h$, e possiamo prendere come punto base il punto $p := -2k = -2k\sqrt{-1}$, si definiscono i cammini γ_h come la composizione $L_h \circ \beta_h L_h^{-1}$, L_h essendo il segmento tra $-2ki$ e $p_h := -h$ percorso fino al punto q_h su questo segmento che dista $1/10$ da p_h , e β_h essendo la circonferenza di centro p_h e raggio $1/10$, percorsa una volta in senso antiorario con punto di partenza in q_h .

Con queste notazioni abbiamo che il gruppo fondamentale e' il gruppo con generatori e relazioni :

$$\langle \gamma_1, \dots, \gamma_k \mid \prod_{h=1}^k \gamma_h = 1 \rangle .$$

I generatori descritti sono un esempio di una **quasi-base geometrica**, che si ottiene piu' generalmente scegliendo una serie di cammini tra il punto base p ed i punti p_h , che non si intersecano ne' si auto-intersecano, e si susseguono l'uno dopo l'altro in ordine antiorario (vedi Figura 2).

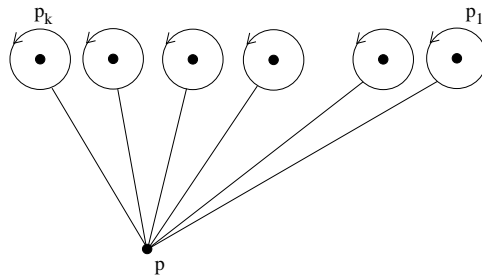


FIGURE 2. Una quasi-base geometrica

Example 3.2. Nel caso di una varieta' complessa C di dimensione 1, o piu' generalmente di una varieta' topologica di dimensione due, il gruppo fondamentale e' libero (caso particolare: l' esempio precedente, dove il gruppo e' liberamente generato da $\gamma_1, \dots, \gamma_{k-1}$, che non soddisfano ad alcuna relazione) se C non e' compatta.

Se invece C e' compatta ed orientabile, allora C e' ottenuta come somma connessa di g tori, ed il suo gruppo fondamentale ha la presentazione

$$\langle \alpha_1, \beta_1, \dots, \alpha_g, \beta_g \mid \prod_{i=1}^g \alpha_i \beta_i \alpha_i^{-1} \beta_i^{-1} = 1 \rangle .$$

Tale presentazione corrisponde alla ben nota realizzazione di C come spazio quoziente di un poligono con $2g$ lati, dove i lati sono identificati secondo lo schema che alla successione di lati percorsi in senso antiorario fa corrispondere la successione di cammini $\alpha_1, \beta_1, \alpha_1^{-1}, \beta_1^{-1}, \dots, \alpha_g, \beta_g, \alpha_g^{-1}, \beta_g^{-1}$.

Remark 3.3. Se prendiamo una somma connessa di due varietà topologiche (che, si presuppone sempre tacitamente, siano connesse) M_1 ed M_2 di dimensione $m \geq 3$, allora il gruppo fondamentale della somma connessa $M_1 \sharp M_2$ e' il prodotto libero $\pi_1(M_1) * \pi_1(M_2)$ di $\pi_1(M_1)$ e di $\pi_1(M_2)$.

In altre parole, date presentazioni $\pi_1(M_1) = \langle a_1, \dots, a_h | R_1(a_i) = 1, \dots, R_t(a_i) = 1 \rangle$ e $\pi_1(M_2) = \langle a'_1, \dots, a'_k | R'_1(a'_i) = 1, \dots, R'_s(a'_i) = 1 \rangle$, allora

$$\pi_1(M_1) * \pi_1(M_2) = \langle a_1, \dots, a_h, a'_1, \dots, a'_k | R_1(a_i) = 1, \dots, R_t(a_i) = 1, R'_1(a'_i) = 1, \dots, R'_s(a'_i) = 1 \rangle.$$

Questa osservazione fa vedere che l'operazione di somma connessa fra varietà non può essere una operazione di gruppo, poiché se A e' un gruppo non banale, e B e' un qualsiasi gruppo, allora il gruppo A e' contenuto nel prodotto libero $A * B$ e quindi $A * B$ e' anche esso non banale, a differenza del gruppo fondamentale dell'elemento neutro S^m , che è banale per $m \geq 2$.

Essendo il gruppo fondamentale un gruppo non Abelianiano, esso da' una ampia possibilità per distinguere varietà fra loro non omeomorfe. Si sa, come osservato in [Seif-Threl] che ogni gruppo finitamente presentato e' il gruppo fondamentale di una varietà topologica compatta di dimensione $m \geq 4$, mentre assai difficile e' rispondere alla domanda: quali sono i gruppi fondamentali di superficie complesse compatte (superficie = varietà di dimensione complessa 2)?

Come vedremo in seguito, esistono molti tipi topologici e differenziabili distinti di varietà semplicemente connesse, cioè con un gruppo fondamentale banale.

4. TRECCE E MAPPING CLASS GROUP.

Si deve ad Emil Artin (cf. [Art1], ed altri articoli cf. [Art]) la elegante definizione del gruppo delle trecce, che fornisce uno strumento potente, ma assai complicato da maneggiare, per lo studio della topologia differenziale delle varietà algebriche, ed in specie delle superficie.

Osserviamo preliminarmente che un sottoinsieme di n punti distinti $\{w_1, \dots, w_n\} \subset \mathbb{C}$ corrisponde biettivamente ad un polinomio monico

$$P(z) := \left(\prod_{i=1}^n (z - w_i) \right) \in \mathbb{C}[z]_n.$$

Viceversa, un polinomio monico $P(z) \in \mathbb{C}[z]_n$ ha una fattorizzazione come sopra in n fattori lineari, solo che le n radici sono distinte se e solo se il discriminante $\delta(P)$ (una funzione polinomiale dei coefficienti di P) non si annulla.

Definition 4.1. Il gruppo delle trecce di Artin, denotato \mathcal{B}_n , e' il gruppo fondamentale

$$\mathcal{B}_n := \pi_1(\mathbb{C}[z]_n - \{P | \delta(P) = 0\})$$

dello spazio dei polinomi monici di grado n a radici distinte.

In genere si prende come "punto base" in tale spazio il polinomio $P(z) := (\prod_{i=1}^n (z - i)) \in \mathbb{C}[z]_n$, ovvero, l'insieme $\{1, 2, \dots, n\}$. Dato un cammino chiuso $\mathcal{P} : [0, 1] \rightarrow (\mathbb{C}[z]_n - \{P \mid \delta(P) = 0\})$, si associa ad esso il sottinsieme di $\mathbb{R}^3 = \mathbb{C} \times \mathbb{R}$ dato da $\{(z, t) \mid \mathcal{P}(t)(z) := P_t(z) = 0\}$.

La Figura 3 mostra appunto due realizzazioni della stessa treccia. Si puo' inoltre osservare, come suggerisce la figura, che, poiche' esiste un sollevamento di \mathcal{P} allo spazio \mathbb{C}^n delle n -uple di radici di un polinomio, si possono cioe' trovare funzioni $w_i(t)$ tali che

$$w_i(0) = i \text{ e } \mathcal{P}(t)(z) := P_t(z) = \prod_{i=1}^n (z - w_i(t))$$

ad una treccia corrisponde anche una permutazione $\tau \in \mathcal{S}_n$ definita da $\tau(i) := w_i(1) \in \{1, 2, \dots, n\}$.

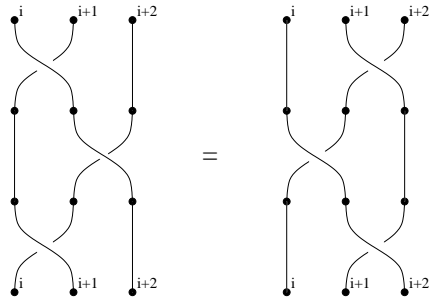


FIGURE 3. Relazione $aba = bab$ sulle trecce

Per quanto visivamente suggestiva sia la rappresentazione delle trecce data da Artin, una generalizzazione potente e' stata data da Max Dehn nel suo lavoro [Dehn] (rimandiamo il lettore per questo ad altri punti che ora menzioneremo al libro [Birm]).

Definition 4.2. *Data una varieta' differenziabile M , il gruppo del Dehn (delle classi di applicazioni) di M , denotato con $\text{Map}(M)$, e' il gruppo quoziente $\pi_0(\text{Diff}(M)) = \text{Diff}(M)/\text{Diff}^0(M)$ delle componenti connesse per archi del gruppo dei diffeomorfismi di M .*

Il sottogruppo $\text{Diff}^0(M)$ si chiama il sottogruppo dei diffeomorfismi isotopi all' identita'.

In pratica, quando la varieta' M e' orientata (ad esempio per le varieta' complesse la struttura complessa induce una orientazione naturale), si considera tacitamente il sottogruppo $\text{Diff}(M)^+$ dei diffeomorfismi che conservano la orientazione.

In questo caso dunque e' meglio definire $\text{Map}(M) = \pi_0(\text{Diff}(M)^+) = \text{Diff}(M)^+/\text{Diff}^0(M)$.

Nel caso particolare ove M sia una curva complessa compatta di genere g , il Mapping Class group si denota con Map_g .

La relazione che sussiste fra gruppo di Artin delle trecce e gruppo del Dehn e' indicata dal seguente

Theorem 4.3. *Il gruppo delle trecce \mathcal{B}_n e' isomorfo al gruppo*

$$\pi_0(\mathcal{M}ap^\infty(\mathbb{C} - \{1, \dots, n\}))$$

delle componenti connesse del gruppo $\mathcal{M}ap^\infty(\mathbb{C} - \{1, \dots, n\})$ dei diffeomorfismi che sono l'identita' al di fuori del cerchio di centro l'origine e raggio $2n$.

Tramite questo isomorfismo si rappresentano i generatori standard di Artin σ_i del gruppo \mathcal{B}_n ($i = 1, \dots, n-1$) tramite i cosiddetti half-twists o mezzigiri:

Definition 4.4. *Il mezzo-giro o half-twist σ_j e' il diffeomorfismo del piano complesso che e' dato da una rotazione di 180 gradi sul cerchio di centro $j+1/2$ e raggio $1/2$, e che poi su una circonferenza con lo stesso centro e raggio $1/2+t/4$ e' dato dall'identita' se $t \geq 1$, e da una rotazione di angolo $180(1-t)$ gradi se $t \leq 1$.*

Poiche' \mathcal{B}_n e' visto come sottogruppo di $\mathcal{M}ap(\mathbb{C} - \{1, \dots, n\})$ e' ovvio che si ha una azione di \mathcal{B}_n sul gruppo libero $\pi_1(\mathbb{C} - \{1, \dots, n\})$ che, se si prende come punto base il numero complesso $p := -2ni$, ha una base geometrica $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ come descritto in precedenza (si noti che qui i $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ non soddisfano nessuna relazione, si ha la relazione $\prod_{h=1}^n \gamma_h = 1$ solo quando si considerano questi cammini come elementi di $\pi_1(\mathbb{P}_\mathbb{C}^1 - \{1, \dots, n\})$).

La azione cosi' ottenuta si chiama

Azione di Hurwitz del gruppo delle trecce, che sostanzialmente corrisponde ai cambiamenti di base geometrica (parimenti il gruppo lineare di uno spazio vettoriale corrisponde ai cambiamenti di base vettoriale) ed ha la seguente descrizione algebrica:

- $\sigma_i(\gamma_i) = \gamma_{i+1}$
- $\sigma_i(\gamma_i \gamma_{i+1}) = \gamma_i \gamma_{i+1}$ e quindi $\sigma_i(\gamma_{i+1}) = \gamma_{i+1}^{-1} \gamma_i \gamma_{i+1}$
- $\sigma_i(\gamma_j) = \gamma_j$ per $j \neq i, i+1$.

Si osserva, come e' intuitivo geometricamente, che il prodotto $\gamma_1 \gamma_2 \dots \gamma_n$ e' lasciato invariante dall'azione del gruppo, e questa osservazione conduce ad una osservazione assai generale

Definition 4.5. *Sia G un gruppo, e consideriamo il suo prodotto Cartesiano G^n . La applicazione che ad una n -upla ordinata (g_1, g_2, \dots, g_n) fa corrispondere il prodotto $g := g_1 g_2 \dots g_n \in G$ ci da' una partizione di G^n i cui sottinsiemi si chiamano **fattorizzazioni** di un elemento $g \in G$. Il gruppo delle trecce \mathcal{B}_n agisce dunque su G^n preservando la partizione, e le sue orbite si chiamano **classi di equivalenza di Hurwitz di fattorizzazioni**.*

Per ricordare il concetto di fattorizzazione useremo la notazione $g_1 \circ g_2 \circ \dots \circ g_n$ che distingue quindi la fattorizzazione dal suo prodotto $g_1 g_2 \dots g_n$ (l'ultima notazione denota invece l'elemento corrispondente di G).

Remark 4.6. *Una equivalenza piu' larga sull'insieme delle fattorizzazioni si ottiene considerando l'equivalenza generata dalla equivalenza di Hurwitz e dalla **coniugazione simultanea** che, usando la notazione $a_b := b^{-1} a b$, corrisponde alla azione di G su G^n che porta $g_1 \circ g_2 \circ \dots \circ g_n$ in $(g_1)_b \circ (g_2)_b \circ \dots \circ (g_n)_b$.*

Si noti che tale azione porta una fattorizzazione di g in una fattorizzazione del coniugato g_b di g .

La equivalenza di cui sopra gioca un ruolo determinante in varie questioni sulle curve piane e sulle superficie algebriche, come vedremo nei prossimi paragrafi. Procediamo intanto a vedere una altra interessante relazione fra il gruppo delle trecce ed il Mapping class group.

Tale relazione e' strettamente collegata col modello topologico di una superficie di Riemann di genere g provvisto dalla curva iperellittica C_g di equazione

$$w^2 = \prod_{i=1}^{2g+2} (z - i)$$

(vedi la Figura 4 che descrive una curva iperellittica di genere $g = 2$).

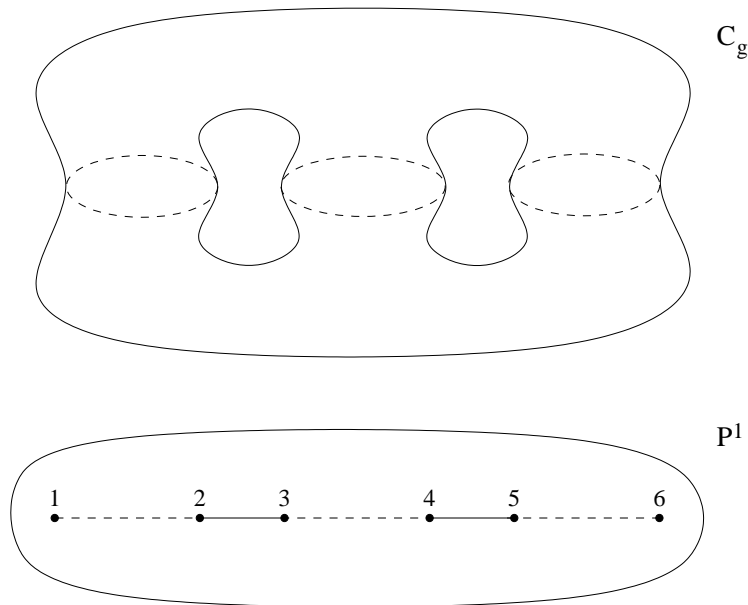


FIGURE 4. Curve iperellittica di genere 2

Si osservi che C_g e' la compattificazione naturale dei limiti all'infinito (**ends** in inglese) del rivestimento doppio Y di $(\mathbb{P}^1 - \{1, \dots, 2g + 2\})$ dato dalla controimmagine di $(\mathbb{P}^1 - \{1, \dots, 2g + 2\})$ in C_g (in tale compattificazione si aggiunge a Y il $\lim_{K \subset \subset Y} \pi_0(Y - K)$).

E' chiaro dunque che ogni omeomorfismo di $(\mathbb{P}^1 - \{1, \dots, 2g + 2\})$ che lascia stabile il sottogruppo associato al rivestimento Y si lascia sollevare ad un omeomorfismo di Y , e quindi anche della sua compattificazione naturale C_g .

Un tale sollevamento non e' unico, perche' possiamo sempre comporre con un automorfismo del rivestimento.

Abbiamo quindi una successione esatta (piu' precisamente una estensione centrale)

$$1 \rightarrow \mathbb{Z}/2 = \langle H \rangle \rightarrow \text{Map}_g^h \rightarrow \text{Map}_{0,2g+2} \rightarrow 1$$

ove

- H e' la involuzione iperellittica $w \rightarrow -w$, che e' l' unico automorfismo non banale del rivestimento
- $\text{Map}_{0,2g+2}$ e' il gruppo del Dehn di $(\mathbb{P}^1 - \{1, \dots, 2g+2\})$
- Map_g^h si chiama il sottogruppo iperellittico del mapping class group Map_g , e consiste appunto di tutti i possibili sollevamenti.
Se $g \geq 3$, e' un sottogruppo proprio di Map_g .

E' interessante osservare che, mentre il gruppo delle trecce di Artin \mathcal{B}_{2g+2} ha la seguente presentazione:

$$\langle \sigma_1, \dots, \sigma_{2g+1} \mid \sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i \text{ per } |i-j| \geq 2, \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1} \rangle,$$

il gruppo del Dehn di $(\mathbb{P}^1 - \{1, \dots, 2g+2\})$ ha la presentazione $\text{Map}_{0,2g+2}$:

$$\langle \sigma_1, \dots, \sigma_{2g+1} \mid \sigma_1 \dots \sigma_{2g+1} \sigma_{2g+1} \dots \sigma_1 = 1, (\sigma_1 \dots \sigma_{2g+1})^{2g+2} = 1,$$

$$\sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i \text{ per } |i-j| \geq 2, \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1} \rangle,$$

infine il mapping class group iperellittico Map_g^h ha la presentazione:

$$\langle \xi_1, \dots, \xi_{2g+1}, H \mid \xi_1 \dots \xi_{2g+1} \xi_{2g+1} \dots \xi_1 = H, H^2 = 1, (\xi_1 \dots \xi_{2g+1})^{2g+2} = 1,$$

$$H \xi_i = \xi_i H \forall i, \xi_i \xi_j = \xi_j \xi_i \text{ per } |i-j| \geq 2, \xi_i \xi_{i+1} \xi_i = \xi_{i+1} \xi_i \xi_{i+1} \rangle.$$

Ma conviene forse lasciare da parte queste importanti formule e ritornare alla geometria. Osserviamo che σ_j da' un omeomorfismo del cerchio U di centro $j+1/2$ e raggio $3/4$, inoltre scambia tra di loro i due punti $j, j+1$.

Quindi ci sono due sollevamenti di σ_j ad omeomorfismi della controimmagine V di U in C_g : si definisce allora ξ_j come quello dei due sollevamenti che agisce come l'identita' sul bordo di V (che e' una unione di due circonferenze, vedi figura 5).

ξ_j si chiama **GIRO del Dehn, o Dehn twist** e corrisponde geometricamente al diffeomorfismo di un tronco di cilindro che e' l' identita' sul bordo, una rotazione di 180 gradi all' equatore, e su ogni parallelo ad altezza t una rotazione di t 360 gradi (qui $t \in [0, 1]$).

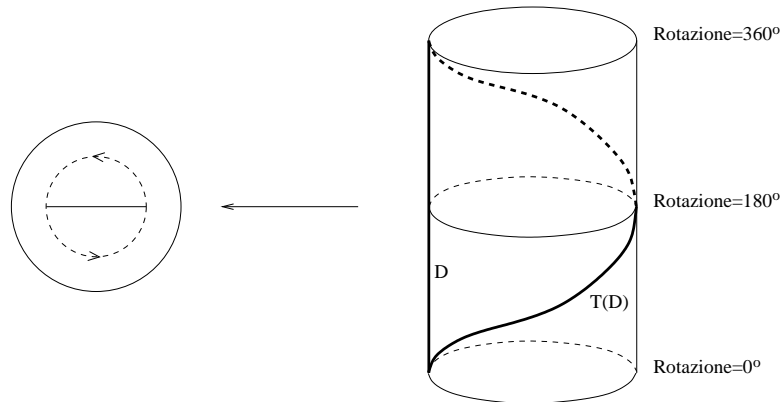


FIGURE 5. A sinistra il mezzo giro, a destra il suo sollevamento: il Dehn-Twist- T e la sua azione sul segmento D

In realta' si puo' definire analogamente un Dehn twist per ogni curva orientata in C_g (cioe' una sottovarieta' diffeomorfa ad S^1), ed il risultato fondamentale del Dehn ([Dehn]) e' stato il

Theorem 4.7. *Il Mapping Class group Map_g e' generato dai Dehn twists.*

Delle presentazioni esplicite di Map_g sono in seguito state date da Hatcher e Thurston ([H-T]) e con un miglioramento del metodo la presentazione piu' semplice e' dovuta a Wajnryb ([Wajnryb-1], vedi anche [Wajnryb-2]).

Vedremo nel prossimo paragrafo come i twists del Dehn sono collegati con la teoria delle fibrazioni di Lefschetz.

5. FIBRAZIONI DI LEFSCHETZ.

Il metodo introdotto da Lefschetz per l'indagine delle proprieta' topologiche delle varieta' algebriche e' l' analogo topologico dei metodi di proiezione e sezione della scuola italiana classica di geometria algebrica.

Nel caso delle varieta' compatte di dimensione reale 4 i metodi della teoria di Morse e della semplificazione del cobordismo avevano trovato ostacoli estremamente ardui da superare, e solo nel 1982 M. Freedman ([Free]), usando nuove idee per dimostrare la trivialita' topologica di certi manici considerati da A. Casson, ha ottenuto una classificazione delle 4-varieta' topologiche compatte semplicemente connesse che ha come corollario

Theorem 5.1. *Sia S una superficie complessa compatta e semplicemente connessa, e sia r l' indice di divisibilita' della classe canonica $c_1(K_X) \in H^2(X, \mathbb{Z})$.*

S si dice PARI se $r \equiv 0 \pmod{2}$, DISPARI altrimenti. Allora

- *Se S e' PARI (questo vale se e solo se la forma di intersezione su $H^2(X, \mathbb{Z})$ e' pari) allora S e' una somma connessa di copie di $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1 \times \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$ e di una superficie K3 se la segnatura della forma di intersezione e' negativa, e di copie di $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1 \times \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$ e di una superficie K3 con orientazione rovesciata nel caso che la detta segnatura sia positiva.*
- *S e' dispari: allora S e' una somma connessa di copie di $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ and $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^{2\text{ opp}}$.*

Remark 5.2. $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^{2\text{ opp}}$ e' la varieta' $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ con orientazione rovesciata.

Invece, una superficie K3 e' una superficie S orientatamente diffeomorfa ad una superficie X non singolare di grado 4 in $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^3$, ad esempio

$$X = \{(x_0, x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^3 \mid x_0^4 + x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 = 0\}.$$

(per un teorema di Kodaira, cf. [Kod], S e' anche equivalente per deformazione a tale X).

La teoria di Donaldson ha reso chiaro in seguito ([Don1], [Don2], [Don3],[Don4]) quanto drasticamente omeomorfismo e diffeomorfismo differiscano in dimensione 4 (a differenza delle altre dimensioni), e specialmente per le superficie algebriche.

La citata congettura di Friedman and Morgan (Def = Diff) fu motivata dai risultati positivi ottenuti tramite la teoria di gauge e gli invarianti di Donaldson.

In seguito, la teoria di Seiberg e Witten ha mostrato con metodi piu' semplici che ogni diffeomorfismo tra superficie minimali (ad esempio, nel caso PARI ogni superficie e' necessariamente minimale) porta $c_1(K_X)$ su $c_1(K_{X'})$ o su $-c_1(K_{X'})$ (cf. [Witten] o [Mor]).

Ne consegue quindi che l' invariante r , definito sopra tramite la divisibilita' della classe canonica, e' un invariante differenziale: ma solo la sua parita' e' un invariante topologico; quindi e' facile trovare esempi di superficie algebriche semplicemente connesse che siano fra loro omeomorfe ma non diffeomorfe (vedi gli esempi di [Cat3]).

Una questione dunque assai difficile e' quella di decidere, per esempio anche nel caso semplicemente connesso, se due superficie algebriche, non deformazione l'una dell' altra, siano effettivamente tra loro diffeomorfe.

Per questo scopo la teoria delle fibrazioni di Lefschetz offre un criterio di determinazione positiva, dovuto a Kas ([Kas]), e che andiamo ad illustrare. Ci soffermeremo per brevitaa' ad illustrare solo il caso di fibrazioni di Lefschetz in dimensione reale 4.

Definition 5.3. *Sia M una 4-varietaa' differenziabile compatta. Possiamo piu' generalmente supporre che su M sia data una struttura simplettica, cioe' una 2-forma differenziale ω tale che $d(\omega) = 0$ e tale che ω dia una forma alternante non degenera in ogni punto di M .*

Una fibrazione di Lefschetz e' una applicazione differenziabile $f : M \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$ che ha differenziale di rango massimo eccetto per un insieme finito di punti critici p_1, \dots, p_m che hanno valori critici distinti $b_1, \dots, b_m \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$, ed ha la proprieta' che intorno al punto p_i esistono coordinate complesse $(x, y) \in \mathbb{C}^2$ tale che localmente $f = x^2 - y^2 + \text{costante}$ (nel caso simplettico, nelle date coordinate la forma ω deve corrispondere alla struttura simplettica standard di \mathbb{C}^2).

Una definizione simile si puo' dare se M ha bordo, rimpiazzando $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$ con un disco $D \subset \mathbb{C}$.

Un importante teorema di Donaldson ([Don6]) assicura che per le varietaa' simplettiche vale, come per il caso di varietaa' algebriche proiettive, la esistenza di un fascio di Lefschetz, cioe' una fibrazione di Lefschetz $f : M' \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$ su uno scoppimento simplettico M' di M (cf.[MD-S]).

Vediamo ora come i Dehn twists intervengono nel contesto delle fibrazioni di Lefschetz.

Consideriamo infatti le coordinate locali speciali intorno ad un punto critico, e supponiamo per semplicitaa' (a meno di traslazione) che il valore critico sia uguale a 0.

Allora, al variare del numero complesso t in un disco di raggio ϵ , la fibra $f^{-1}(t)$ e' localmente descritta dalla equazione $y^2 = x^2 - t$, e si ha dunque un rivestimento doppio diramato sulle due radici $\pm\sqrt{t}$ del polinomio $x^2 - t$.

Consideriamo la immagine inversa della circonferenza di centro l' origine e raggio ϵ : $f^{-1}(\{t|t = \epsilon e^{2\pi i\theta}\})$ e' localmente omeomorfa al quoziente del prodotto Cartesiano $f^{-1}(\epsilon) \times [0, 1]$ per la relazione di equivalenza che identifica $f^{-1}(\epsilon) \times \{0\}$ con $f^{-1}(\epsilon) \times \{1\}$ tramite il diffeomorfismo T dato dal Dehn twist sul ciclo

evanescente immagine inversa del segmento con estremi $\pm\sqrt{\epsilon}$ (il ciclo si chiama evanescente perche' chiaramente, quando t tende a zero, il segmento di estremi $\pm\sqrt{t}$ tende a svanire in un punto).

In altre parole, la **monodromia locale**, cioe' sopra la circonferenza $\{t|t = \epsilon e^{2\pi i\theta}\}$ e' dato dal sollevamento del mezzo giro sul segmento di estremita' $\pm\sqrt{\epsilon}$ (vedi figura 5).

Quel che succede globalmente e' che una fibrazione di Lefschetz di curve di genere g e con valori critici $b_1, \dots, b_m \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$, una volta che si e' scelta una quasi-base geometrica $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_m$ di $\pi_1(\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1 - \{b_1, \dots, b_m\})$, determina una fattorizzazione della identita'

$$\tau_1 \circ \tau_2 \circ \dots \circ \tau_m = Id$$

come prodotto di Dehn twists nel Mapping class group $\mathcal{M}ap_g$.

Possiamo ora enunciare l' importante risultato ottenuto da Kas nel 1980 ([Kas]) (influenzato dalla rivisitazione da parte di Andreotti-Frenkel e Moisezon dei risultati di Lefschetz)

Theorem 5.4. (Kas) *Due fibrazioni di Lefschetz (M, f) , (M', f') si dicono equivalenti se esistono due diffeomorfismi $u : M \rightarrow M', v : \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1$ tali che $f' \circ u = v \circ f$.*

Orbene, la classe di equivalenza di una fibrazione di Lefschetz (M, f) e' completamente determinata dalla classe di equivalenza della sua fattorizzazione della identita' nel Mapping class group (per la relazione di equivalenza generata da equivalenza di Hurwitz e da coniugazione simultanea).

Un risultato simile vale per una fibrazione di Lefschetz sopra un disco $D \subset \mathbb{C}$: otteniamo una fattorizzazione

$$\tau_1 \circ \tau_2 \circ \dots \circ \tau_m = \phi$$

della monodromia ϕ della fibrazione sulla circonferenza bordo di D .

Inoltre, la fibrazione ammette una struttura simplettica se e solo se ogni τ_i e' un Dehn twist positivamente orientato.

Siamo ora in grado di ricucire il filo con gli esempi di chirurgia mostrati nel primo paragrafo.

Infatti, date due fibrazioni di Lefschetz su $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$, consideriamo come sottovarieta' N_i una fibra liscia della fibrazione, dimodoche' il suo fibrato normale e' banale : allora la chirurgia associata alle trivializzazioni da' un risultato che si chiama **Somma sulla fibra (fiber sum** in inglese) delle due fibrazioni di Lefschetz., e dipende dal diffeomorfismo scelto tra N_1 ed N_2 (cf. [G-S], Def. 7.1.11, e Teorema 10.2.1.).

Questa operazione si traduce, in vista del risultato di Kas sopra citato, nella composizione "coniugata" di due fattorizzazioni

Definition 5.5. *Siano $\tau_1 \circ \tau_2 \circ \dots \circ \tau_m = \phi$ e $\tau'_1 \circ \tau'_2 \circ \dots \circ \tau'_r = \phi'$ due fattorizzazioni: allora la loro composizione coniugata per ψ e' la fattorizzazione*

$$\tau_1 \circ \tau_2 \circ \dots \circ \tau_m \circ (\tau'_1)_{\psi} \circ (\tau'_2)_{\psi} \circ \dots \circ (\tau'_r)_{\psi} = \phi(\phi')_{\psi}.$$

Se ψ commuta con ϕ' , otteniamo una fattorizzazione di $\phi\phi'$.

Un caso particolare e' quello in cui ϕ, ϕ' sono banali, caso che corrisponde alle fibrazioni di Lefschetz su \mathbb{P}^1 .

6. ABC E DEF \neq DIFF NEL CASO SEMPLICEMENTE CONNESSO.

Abbiamo osservato che, se due varieta' complesse X, X' sono equivalenti per deformazione, allora esiste un diffeomorfismo che porta la classe canonica $c_1(K_X) \in H^2(X, \mathbb{Z})$ di X su quella di X' . D'altra parte per il risultato di Seiberg-Witten un diffeomorfismo porta la classe canonica di una superficie minimale S su $\pm c_1(K_{S'})$. Quindi, se diamo almeno tre superficie fra loro (orientatamente) diffeomorfe, ne troviamo sicuramente due tra cui esiste un diffeomorfismo con la proprieta' di portare la classe canonica sulla classe canonica.

Il seguente teorema, ottenuto in [C-W], da' il contreesempio cercato alla congettura di Friedman Morgan anche nel caso semplicemente connesso.

Theorem 6.1. *Per ogni intero positivo h , esistono h superficie S_1, \dots, S_h semplicemente connesse, diffeomorfe l'una con l'altra, ma tali che due di queste superficie non sono mai equivalenti per deformazione.*

Gli esempi considerati sono le superficie (a, b, c) ottenute come compattificazioni minime delle superficie affini di equazioni

$$(1) \quad \begin{aligned} z^2 &= f(x, y) \\ w^2 &= g(x, y), \end{aligned}$$

dove f e g sono polinomi di bigradi rispettivi $(2a, 2b), (2c, 2b)$.

Per ottenere le compattificazioni si considerano le estensioni di questi polinomi a sezioni di fasci invertibili su $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$: $f \in H^0(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1}(2a, 2b))$ e $g \in H^0(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1}(2c, 2b))$, e se ne prendono le radici quadrate dentro lo spazio totale della somma diretta dei due fibrati lineari associati a $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1}(a, b), \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1}(c, b)$.

La superficie non singolare e compatta S ottenuta e' un rivestimento "bidoppio" (cioe' Galois con gruppo $(\mathbb{Z}/2)^2$) di $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$ semplice di tipo $((2a, 2b), (2c, 2b))$, e viene denotata per semplicita' come "superficie (a, b, c) ".

La compattificazione S e' non singolare purché le due curve $f = 0$ e $g = 0$ siano lisce e si intersechino trasversalmente.

Il teorema fondamentale sopra citato segue piu' precisamente dai due teoremi seguenti:

Theorem 6.2. *Siano S una superficie (a, b, c) , S' una superficie $(a+k, b, c-k)$.*

Se assumiamo

- (I) a, b, c, k sono interi pari positivi con $a, b, c - k \geq 4$
- (II) $a \geq 2c + 1$,
- (III) $b \geq c + 2$.

Allora S e S' non sono equivalenti per deformazione

Theorem 6.3. *Siano S, S' una superficie (a, b, c) , rispettivamente una superficie $(a + 1, b, c - 1)$. , e si assuma che $a, b, c - 1$ siano interi $a, b, c - 1 \geq 2$.*

Allora S e S' sono diffeomorfe.

Si noti che le superficie in questione sono semplicemente connesse, come mostrato in (cf. [Cat1, Proposition 2.7]).

Il primo di questi teoremi usa tecniche e risultati diversi, sviluppati in una serie di lavori ([Cat1], [Cat2],[Cat3], [Man1],[Man3]), e che appartengono alla geometria algebrica ed alla teoria delle singolarita' : teoria delle piccole deformazione alla Kuranishi, degenerazioni normali di superficie lisce, singolarita' quozienti di punti doppi razionali.

Un ingrediente estremamente semplice ma di fondamentale importanza e' il concetto di **deformazioni naturali di un rivestimento bidoppio** ([Cat1], def. 2.8 , page 494) che sono parametrizzate da una quaterna di polinomi f, g, ϕ, ψ a cui corrispondono le equazioni

$$(2) \quad \begin{aligned} z^2 &= f(x, y) + w\phi(x, y) \\ w^2 &= g(x, y) + z\psi(x, y), \end{aligned}$$

(f, g sono come prima , mentre ϕ ha bigrado $(2a-c, 2b-d)$, ψ ha bigrado $(2c-a, 2d-b)$).

Le deformazioni naturali danno tutte le piccole deformazioni, sotto ipotesi opportune (base rigida, e curve di diramazione abbastanza positive).

Inoltre, poiche' $a \geq 2c + 1$, segue che $\psi \equiv 0$, ed allora ogni piccola deformazione conserva la struttura di *rivestimento doppio iterato* ([Man3]): cioe' ciascuna superficie possiede l' automorfismo $z \rightarrow -z$, ed il quoziente per questo automorfismo possiede l' automorfismo $w \rightarrow -w$.

Il punto finale e' di mostrare che questa struttura passa convenientemente al limite, in modo che si ottiene un insieme non solo aperto, ma anche chiuso dello spazio dei moduli.

Sugli altri metodi assai "complessi" utilizzati non mi voglio qui soffermare, sia per mancanza di tempo, sia perche' scopo di questo articolo era di illustrare i metodi di topologia differenziale usati per il secondo di questi due teoremi.

Le idea chiave usate per quest' ultimo sono che:

1) entrambe le superficie S ed S' posseggono una applicazione olomorfa su $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$ data dalla composizione del rivestimento bidoppio colla proiezione sulla prima coordinata x , ed una piccola perturbazione di questa applicazione le realizza come fibrazioni di Lefschetz simplettiche (cf. [Don7], [G-S])

2) le rispettive fibrazioni, proprio per la scelta accorta dei gradi delle curve (la prima curva $\{f = 0\}$ perde un bigrado $(2,0)$, e la seconda $\{g = 0\}$ lo acquista) sono somma sulla fibra della stessa coppia di fibrazioni di Lefschetz sopra il disco

3) per dimostrare che le due somme sulla fibra sono equivalenti e' sufficiente mostrare che, una volta che la prima delle due sia rappresentata come composizione di due fattorizzazioni, e la seconda come composizione coniugata per ψ delle stesse fattorizzazioni,

(**) il diffeomorfismo ψ sta nel sottogruppo del Mapping Class Group della fibra generato dai Dehn twists che compaiono nella prima fattorizzazione (lemma di Auroux, [Aur02], cf. anche [Kas]).

4) La figura 6 mostra la curva C fibra della fibrazione nel caso $2b = 6$: essa e' un rivestimento bidoppio di $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$, che possiamo supporre dato dalle equazioni

- $z^2 = F(y), w^2 = F(-y)$
dove le radici di F sono gli interi positivi $1, \dots, 2b$,
- si vede inoltre che la monodromia della fibrazione sul bordo del disco e' banale
- e che la applicazione ψ e' data dal diffeomorfismo di ordine due
(*) $y \rightarrow -y, z \rightarrow w, w \rightarrow z$

che nella figura 6 e' rappresentato da una rotazione di 180 gradi intorno ad un asse inclinato verso Nord Ovest.

La figura mostra una evidente simmetria diedrale, ove l' automorfismo di ordine 4 e' dato da (*) $y \rightarrow -y, z \rightarrow -w, w \rightarrow z$.

Inoltre, fra i Dehn twists che compaiono nella fattorizzazione ci sono quelli corrispondenti alle curve immagini inverse dei segmenti fra due interi consecutivi (vedi figura 6).

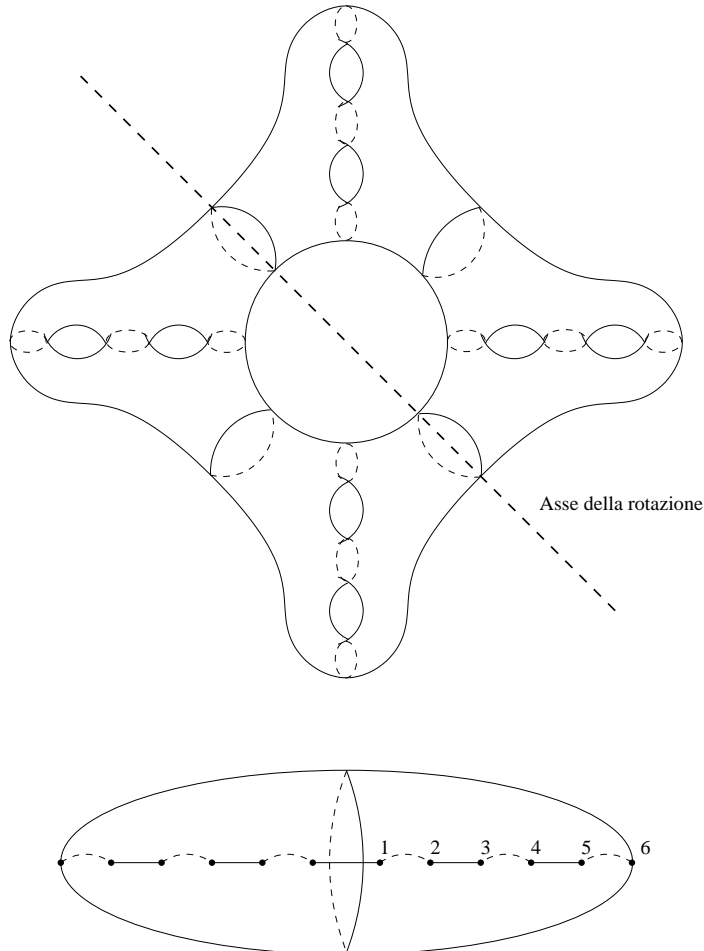


FIGURE 6. La Curva Complessa C a Simmetria Diedrale

Queste curve si possono organizzare sulla curva C in sei catene (non tra loro disgiunte), ed infine si e' ridotti a mostrare che la classe di isotopia di ψ e' la stessa del prodotto di sei elementi di Coxeter associati a tali catene.

Ricordiamo che gli elementi di Coxeter di una catena sono prodotti del tipo

$\Delta = (T_{\alpha_1})(T_{\alpha_2}T_{\alpha_1}) \dots (T_{\alpha_{n-1}}T_{\alpha_{n-2}} \dots T_{\alpha_1})(T_{\alpha_n}T_{\alpha_{n-1}} \dots T_{\alpha_1})$ dei Dehn twists associati alle curve della catena.

Per dimostrare infine che tale prodotto ψ' di elementi di Coxeter e ψ sono tra loro isotopi, si osserva che rimuovendo le curve sopraccitate dalla curva complessa C si ottengono 4 componenti connesse diffeomorfe a dei cerchi. Basta allora verificare (per un risultato di Epstein) che ψ' e ψ portano ciascuna di tali curve su una coppia di curve isotope: l' ultimo passo richiede una serie di lunghe anche se facili verifiche, per cui sono importanti delle figure esplicite.

7. VARIETA' SIMPLETTICHE E MONODROMIA DELLE TRECCE.

Nel lavoro ([Cat6]) e' stato osservato che una superficie di tipo generale possiede una struttura simplettica canonica, unica a meno di simplettomorfismo, tale che la classe della forma simplettica ω in coomologia di De Rham sia l'immagine della classe canonica $c_1(K_X)$ in $H^2(X, \mathbb{R})$.

Nel migliore dei mondi possibili, assumendo cioe' che il divisore canonico sia ampio (ed in ogni dimensione), si prende semplicemente il pull-back della forma di Fubini Study tramite una immersione m -pluricanonica in uno spazio proiettivo, e poi la si divide per m . Il lemma di Moser assicura che la struttura cosi' ottenuta e' unica.

Una domanda naturale e' se le superficie di tipo (a,b,c) fra loro diffeomorfe (cioe' quelle con gli stessi valori di (a+c) e b) sono anche tra loro simplettomorfe se munite della struttura simplettica canonica.

Un modo di dimostrarlo analizzando la monodromia delle trecce della curva di diramazione del rivestimento quadruplo "perturbato" (corrispondente alla fibrazione di Lefschetz), e mostrando che la involuzione ι su \mathbb{P}^1_C tale che $\iota(y) = -y$ e' un prodotto delle trecce che capitano nella fattorizzazione si e' rivelata assai piu' difficile della corrispondente analisi fatta nel Mapping class group (il problema e' che si ha un omomorfismo non iniettivo da un sottogruppo " \mathcal{S}_4 -colorato" , cf. [C-W], del gruppo delle trecce dentro il Mapping class group).

Ci si puo' chiedere piu' generalmente se, considerando fibrazioni ologomorfe $f : S \rightarrow B$ su una curva B , con fibre curve di genere $g \geq 2$, che ammettano una perturbazione in una fibrazione di Lefschetz simplettica con tutte le fibre singolari irriducibili (cioe', tali che il nodo non disconnette la fibra), allora la equivalenza come fibrazioni di Lefschetz differenziabili e' la stessa della equivalenza di fibrazioni di Lefschetz simplettiche.

L'idea e' di pensare f come data da un morfismo classificante ϕ da B nello spazio dei moduli compatificato $\overline{\mathcal{M}}_g$ delle curve di genere g .

Il tipo differenziabile della fibrazione perturbata f' e' dato dalla fattorizzazione della monodromia nel mapping class group $\mathcal{M}ap_g$. D' altra parte $\mathcal{M}ap_g$ agisce in modo propriamente discontinuo sul dominio di Teichmüller \mathcal{T}_g

con quoziente \mathcal{M}_g . La classe della fattorizzazione dovrebbe dare la classe di isotopia della applicazione perturbata ϕ' .

Da qui dovrebbe seguire la esistenza ed unicit  di una struttura simplettica naturale, associata alla classe canonica relativa $K_{S|B}$, in qualche modo collegata alla struttura simplettica naturale introdotta da Gompf ([Gompf1]) per fibrazioni di Lefschetz.

Si noti che , alla luce del citato risultato di Donaldson che associa ad una 4- varieta' simplettica un fascio di Lefschetz naturale, viene fuori che la chiave della classificazione delle 4- varieta' simplettiche sta nella comprensione delle classi di equivalenza di fattorizzazioni nel Mapping class group.

Il lavoro [C-W] da' dei risultati positivi, nel senso che offre la possibilita', in diversi casi importanti, di dimostrare la equivalenza di due fattorizzazioni.

Ma sarebbe anche interessante dare dei criteri effettivamente funzionanti e non banali per determinare delle ostruzioni alla equivalenza di due fattorizzazioni.

Nel prossimo paragrafo vedremo una proposta fatta recentemente nel caso analogo dei rivestimenti generici del piano $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$.

8. MONODROMIA DELLE TRECCE ED IL PROBLEMA DI CHISINI.

Sia $B \subset \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ una curva algebrica piana di grado d , e prendiamo un punto P generico che non giace su B .

Il fascio delle rette L_t passanti per P determina una famiglia ad un parametro di d -uple di punti di $\mathbb{C} \cong L_t - \{P\}$, cioe' $L_t \cap B$. Si ottiene quindi una fattorizzazione nel gruppo delle trecce \mathcal{B}_d , con prodotto questa volta $(\Delta^2)^d$, ove $(\Delta^2) = (\sigma_{d-1}\sigma_{d-2} \dots \sigma_1)^d$ e' il generatore del centro del gruppo delle trecce.

La classe di equivalenza della fattorizzazione (per equivalenza di Hurwitz e coniugazione simultanea) non dipende dal punto P , se questo e' generico, e non cambia se B varia in una famiglia equisingolare di curve.

Ad esempio, se B e' liscia, si ha una classe di fattorizzazione data da mezzi giri.

Il caso che piu' interessava a Chisini (cf. e.g. [Chis1], [Chis2]) era quello delle curve **cuspidali**, cioe' che hanno come singolarita' solo nodi o cuspidi, anche perche' queste sono le singolarita' del luogo di diramazione di un rivestimento generico $f : S \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$, tale cioe' che gli stabilizzatori locali siano solo $\mathbb{Z}/2 = \mathcal{S}_2$ oppure \mathcal{S}_3 , e tali che i punti critici che hanno la stessa immagine sono al piu' una coppia di ramificazione semplice dove i due rami hanno immagine trasversale (e quindi la monodromia locale e' $\mathcal{S}_2 \times \mathcal{S}_2$).

In questo caso si ha una fattorizzazione **di tipo cuspidale**, cioe' in cui tutti i fattori sono potenze di un mezzo giro con esponente 1, 2, 3 a seconda che si abbia una retta L_t tangente in un punto liscio, una retta per un nodo, oppure una retta per una cuspidale.

I problemi fondamentali relativi alle trecce algebriche posti da Chisini sono stati i seguenti

Congettura di Chisini, cf. [Chis1] : *Dati due rivestimenti generici $f : S \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$, $f' : S' \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ di grado maggiore od uguale a 5, e con la stessa curva di diramazione B , si puo' concludere che i due rivestimenti sono equivalenti?*

Chisini stesso osserva in [Chis1] come la condizione che il grado sia almeno 5 sia necessario, e questo e' collegato col fatto che le tre trasposizioni $(1,2)(2,3)(3,1) \in \mathcal{S}_3$ e le tre trasposizioni $(1,2)(1,3)(1,4) \in \mathcal{S}_4$ soddisfano alle stesse relazioni di commutazione (e Chisini produce effettivamente due rivestimenti di gradi rispettivi tre e quattro, generici e con la stessa curva di diramazione).

La congettura e' ancora aperta, ma e' stata sostanzialmente dimostrata da Viktor Kulikov ([Kul]) (con un astuto miglioramento tecnico dovuto a Nemiroski, [Nem]): infatti e' vera se il grado di ciascun rivestimento e' almeno 12.

Una risposta negativa, ad opera di Boris Moisezon ([Moi94]) ha avuto invece il seguente

Problema di Chisini, cf. [Chis2] : *Date due fattorizzazioni di tipo cuspidale, rigenerabili alla fattorizzazione di una curva algebrica piana non singolare, esiste una curva cuspidale che realizza tale fattorizzazione?*

Rigenerabile alla fattorizzazione di una curva algebrica piana non singolare significa che esiste una fattorizzazione nella classe tale che, se si rimpiazza ogni fattore del tipo σ^i ($i = 2, 3$), ove σ e' un mezzo giro, con gli i fattori corrispondenti (ad esempio si rimpiazza σ^3 con $\sigma \circ \sigma \circ \sigma$), si ottiene la classe di equivalenza della fattorizzazione di una curva algebrica piana non singolare.

Si noti che questa condizione e' necessaria, perche' ogni curva piana ha una piccola deformazione che e' una curva non singolare.

D' altra parte le famiglie di curve cuspidali di grado d fissato sono un insieme algebrico, che ha un numero finito di componenti connesse: ne segue che le classi di fattorizzazioni in \mathcal{B}_d provenienti da curve cuspidali sono solo in un numero finito.

Moisezon mostra invece l'esistenza di infinite fattorizzazioni di tipo cuspidale non equivalenti, poiche' osserva che il gruppo fondamentale del complementare di B , $\pi_1(\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 - B)$ e' un invariante della fattorizzazione.

Come congetturato da Moisezon, il punto e' che una fattorizzazione di tipo cuspidale, ed una monodromia generica a valori in \mathcal{S}_n da' luogo ad un rivestimento $M \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ dove M e' una 4-varietas' simplettica.

Estendendo le tecniche sviluppate da Donaldson per dimostrare la esistenza di fibrazioni di Lefschetz, Auroux e Katzarkov ([A-K]) hanno dimostrato che ogni 4-varietas' simplettica e' in modo naturale asintoticamente realizzata tramite un tale rivestimento generico, ed hanno proposto di utilizzare un quoziente appropriato di $\pi_1(\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 - B)$ per produrre invarianti di strutture simplettiche.

In questo contesto (cf. [A-D-K]) gli esempi di Moisezon sono stati rivisitati in modo piu' semplice tamite operazioni di chirurgia simplettica, mentre Auroux, Donaldson, Katzarkov e Yotov ([A-D-K-Y]) hanno verificato che gli invarianti prodotti non riescono pero' a distinguere al di la' della struttura topologica.

Questo quadro emerge anche da una serie di lavori di Moisezon e Teicher (si veda ad esempio [M-T]) e l' unico suggerimento interessante, sebbene complicato, che mi sento di dare e' il seguente.

Consideriamo una superficie di tipo generale S ed una sua immersione m -pluricanonica: una proiezione generica su $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^3$ da' allora una superficie con una curva doppia Γ' , mentre una proiezione successiva su $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ ci da' non solo la curva di diramazione B , ma anche la curva Γ immagine di Γ' .

Anche se la congettura di Chisini ci dice che da un punto di vista olomorfo la curva B determina la superficie S e quindi la curva Γ , da cio' non segue che il gruppo fondamentale $\pi_1(\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 - B)$ determini il gruppo $\pi_1(\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 - B - \Gamma)$.

Sarebbe molto bello poter calcolare questo secondo gruppo fondamentale, anche se solo in casi particolari.

REFERENCES

- [A-B-K-P] J. Amoros, F. Bogomolov, L. Katzarkov, T.Pantev *Symplectic Lefschetz fibrations with arbitrary fundamental group*, With an appendix by Ivan Smith, **J. Differential Geom.** **54** no. 3, (2000), 489–545
- [Art1] E. Artin, *Theorie der Zöpfe* **Hamburg Univ. Math. Seminar Abhandlungen** **4-5** (1926), 47-72.
- [Art] E. Artin, *The collected papers of Emil Artin*, Edited by Serge Lang and John T. Tate **Addison–Wesley Publishing Co., Inc., Reading, Mass.-London** (1965) xvi+560 pp.
- [Aur02] D. Auroux, *Fiber sums of genus 2 Lefschetz fibrations* **Turkish J. Math.** **27** no. 1, (2003), 1–10.
- [A-K] D. Auroux, L. Katzarkov , *Branched coverings of $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$ and invariants of symplectic 4-manifolds* **Inv. Math.** **142** (2000), 631-673.
- [A-D-K-Y] D. Auroux, S. Donaldson, L. Katzarkov and M. Yotov, *Fundamental groups of complements of plane curves and symplectic invariants* **GT/0203183v1** (2002).
- [A-D-K] D. Auroux, S. Donaldson, L. Katzarkov *Luttinger surgery along Lagrangian tori and non-isotopy for singular symplectic plane curves.* **Math. Ann.** **326** no. 1, (2003), 185–203
- [Birm] J. S. Birman, *Braids, links, and mapping class groups*, **Annals of Mathematics Studies, No. 82** Princeton University Press, Princeton, N.J.; University of Tokyo Press, Tokyo, 1974. ix+228 pp.
- [Cat1] F. Catanese, *On the Moduli Spaces of Surfaces of General Type*, **J. Diff. Geom** **19** (1984) 483–515.
- [Cat2] F. Catanese, *Automorphisms of Rational Double Points and Moduli Spaces of Surfaces of General Type*, **Comp. Math.** **61** (1987) 81-102.
- [Cat3] F. Catanese, *Connected Components of Moduli Spaces*, **J. Diff. Geom** **24** (1986) 395-399.
- [Cat4] F. Catanese, *Moduli Spaces of Surfaces and Real Structures*, **Annals of Math.** **158**, n.2 (2003), 577-592.
- [Cat6] F. Catanese, *Symplectic structures of algebraic surfaces and deformation*, math.AG/0207254, 14 pages.
- [C-W] F. Catanese, B. Wajnryb, *Diffeomorphism of simply connected algebraic surfaces* , 33 pages , math.AG/0405299.
- [Chis1] O. Chisini, *Sulla identita' birazionale delle funzioni algebriche di due variabili dotate di una medesima curva di diramazione*, **Ist. Lombardo Sci. Lett., Rend., Cl. Sci. Mat. Natur., III. Ser.** **8(77)** (1944), 339-356 .
- [Chis2] O. Chisini, *Il teorema di esistenza delle trecce algebriche. I-III*, **Atti Accad. Naz. Lincei, VIII. Ser., Rend., Cl. Sci. Fis. Mat. Nat.** **17,17,18** (1954), 143-149 , 307-311 , (1955), 8-13 .

- [Dehn] M. Dehn, *Die Gruppe der Abbildungsklassen. (Das arithmetische Feld auf Flächen.)* **Acta Math.** **69** (1938), 135-206.
- [Don1] S.K. Donaldson, *An Application of Gauge Theory to Four-Dimensional Topology*, **J. Diff. Geom.** **18** (1983) 279–315.
- [Don2] S.K. Donaldson, *Connections, cohomology and the intersection forms of 4-manifolds.* **J. Diff. Geom.** **24** (1986) 275-341.
- [Don3] S.K. Donaldson, *Polynomial invariants for smooth four-manifolds.* **Topology** **29,3** (1990) 257-315 .
- [Don4] S.K. Donaldson, *Gauge theory and four-manifold topology.* [CA] Joseph, A. (ed.) et al., First European congress of mathematics (ECM), Paris, France, July 6-10, 1992. Volume I: Invited lectures (Part 1). **Basel: Birkhäuser, Prog. Math.** **119** (1994) 121-151 .
- [Don5] S.K. Donaldson, *The Seiberg-Witten Equations and 4-manifold topology.* **Bull. Am. Math. Soc., (N S)** **33, 1** (1996) 45-70.
- [Don6] S. K. Donaldson, *Lefschetz pencils on symplectic manifolds.* **J. Differential Geom.** **53** no. 2, (1999), 205–236.
- [Don7] S. K. Donaldson, *Lefschetz fibrations in symplectic geometry.* Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. II (Berlin, 1998). **Doc. Math.** **1998, Extra Vol. II** , 309–314.
- [D-K] S.K. Donaldson, P.B. Kronheimer *The geometry of four-manifolds.* **Oxford Mathematical Monographs. Oxford: Clarendon Press**, (1990) ix, 440 p..
- [D-S] S.K. Donaldson, I. Smith, *Lefschetz pencils and the canonical class for symplectic four-manifolds.* **Topology** **42** no. 4, (2003), 743–785
- [F-Q] M. Freedman and F.Quinn, *Topology of 4- manifolds.*, **Princeton Math. Series** **39** (1990).
- [Free] M. Freedman, *On the topology of 4- manifolds.*, **J. Diff. Geom.** **17** (1982), 357-454.
- [F-M-M] R. Friedman, B.G. Moisezon, J.W.Morgan, *On the C^∞ invariance of the canonical classes of certain algebraic surfaces .*, **Bull. Amer. Math.Soc.** **17** (1987) 283-286.
- [F-M1] R. Friedman and J.W.Morgan, *Algebraic surfaces and four-manifolds : some conjectures and speculations.*, **Bull. Amer. Math.Soc.** **18** (1988) 1-19.
- [F-M2] R. Friedman and J.W.Morgan, *Complex versus differentiable classification of algebraic surfaces.* **Topology Appl.** **32, No.2** (1989) 135-139.
- [F-M3] R. Friedman and J.W.Morgan, *Smooth four-manifolds and complex surfaces.* **Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. F. 27.** **Berlin: Springer-Verlag** (1994) x, 520 p.
- [F-M4] R. Friedman and J.W.Morgan, *Algebraic surfaces and Seiberg-Witten invariants.* **J. Algebr. Geom.** **6, No.3** (1997) 445-479.
- [Gompf1] R.E. Gompf, *A new construction of symplectic manifolds* **Ann. of Math.** **142** 3 (1995), 527-595.
- [Gompf2] R.E. Gompf, *The topology of symplectic manifolds.* **Turkish J. Math.** **25** no. 1, (2001), 43–59.
- [G-S] R.E. Gompf, A. Stipsicz, *4-manifolds and Kirby calculus.* **Graduate Studies in Mathematics, 20.** **American Mathematical Society, Providence, RI**, (1999) xvi+558 pp.
- [H-T] A. Hatcher, W. Thurston, *A presentation for the mapping class group of a closed orientable surface*, **Topology** **19** , no. **3** (1980), 221–237.
- [Kas] A. Kas, *On the handlebody decomposition associated to a Lefschetz fibration.* **Pacific J. Math.** **89** no. 1, (1980), 89–104.
- [K-K] V.M. Kharlamov and V.S. Kulikov, *On real structures of real surfaces .* **Izv. Ross. Akad. Nauk Ser. Mat.** **66** no. 1,(2002), 133–152; translation in **Izv. Math.** **66** no. 1, (2002), 133–150
- [Kod] K. Kodaira, *On the structure of compact complex analytic surfaces I, II*, **Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.** **50, 51** , (1963), 218–221 e (1963), 1100–1104.
- [Kul] V.S. Kulikov, *On Chisini's conjecture*, **Izv. Ross. Akad. Nauk Ser. Mat.** **63, no. 6**(1999), 83–116; translation in **Izv. Math.** **63 no. 6** (1999), 1139–1170.

- [MD-S] D. McDuff, D. Salamon, *Introduction to symplectic topology*. Second edition. **Oxford Mathematical Monographs. The Clarendon Press, Oxford University Press, New York**(1998) x+486 pp.
- [Man1] M. Manetti, *On some Components of the Moduli Space of Surfaces of General Type*, **Comp. Math.** **92** (1994) 285-297.
- [Man3] M. Manetti, *Iterated Double Covers and Connected Components of Moduli Spaces*, **Topology** **36**, **3** (1997) 745-764.
- [Man4] M. Manetti, *On the Moduli Space of diffeomorphic algebraic surfaces*, **Inv. Math.** **143** (2001), 29-76.
- [Manf] S. Manfredini, *Some subgroups of Artin's braid group*, Special issue on braid groups and related topics (Jerusalem, 1995), **Topology Appl.** **78 n. 1-2** (1997), 123-142.
- [Moi77] B. Moishezon, *Complex surfaces and connected sums of complex projective planes. With an appendix by R. Livne.* **Lecture Notes in Mathematics, Vol. 603**. Springer-Verlag, Berlin-New York (1977), i+234 pp.
- [Moi94] B. Moishezon, *The arithmetics of braids and a statement of Chisini*, in 'Geometric Topology, Haifa 1992', **Contemp. Math.** **164, A.M.S.** (1994), 151-175.
- [M-T] B. Moishezon, M. Teicher, *Finite fundamental groups, free over $\mathbb{Z}/c\mathbb{Z}$, for Galois covers of $\mathbb{C}P^2$* , **Math. Ann.** **293 no. 4** (1992), 749-766.
- [Mor] J. W. Morgan, *The Seiberg-Witten equations and applications to the topology of smooth four-manifolds*. **Mathematical Notes 44. Princeton Univ. Press** vi, 128 p.
- [Nem] S. Y. Nemirovskii, *On Kulikov's theorem on the Chisini conjecture* **Izv. Ross. Akad. Nauk Ser. Mat.** **65** , **no. 1** (2001), 77-80; translation in **Izv. Math.** **65** , **no. 1**(2001), 71-74.
- [Seif-Threl] H. Seifert, W. Threlfall, *A textbook of topology* Translated from the German edition of 1934. **Pure and Applied Mathematics, 89. Academic Press, Inc. [Harcourt Brace Jovanovich, Publishers], New York-London** (1980), xvi+437 pp.
- [Wajnryb-1] B. Wajnryb, *A simple presentation for the mapping class group of an orientable surface*, **Israel J. Math.** **45 no. 2-3**, (1983), 157-174
- [Wajnryb-2] B. Wajnryb, *An elementary approach to the mapping class group of a surface*, **Geom. Topol.** **3** (1999), 405-466
- [Witten] E. Witten, *Monopoles and Four-Manifolds*, **Math. Res. Lett.** **1** (1994) 809-822.

Acknowledgements. Vorrei ringraziare sentitamente Fabio Tonoli per utili consigli e per avere prodotto i file eps delle figure.

Author's address:

Prof. Fabrizio Catanese
 Lehrstuhl Mathematik VIII
 Universität Bayreuth, NWII
 D-95440 Bayreuth, Germany

e-mail: Fabrizio.Catanese@uni-bayreuth.de